Pratique Supplémentaire 7 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 4.3, 4.4, 4.5 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$ telles que

$$KerA \cap ColB = \{\overrightarrow{0}\}.$$

Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b}_1, \cdots, \overrightarrow{b}_k\}$, $k \leqslant n$, une base de $ColB$. Montrer que $\{A\overrightarrow{b}_1, \cdots, A\overrightarrow{b}_k\}$ est une base de $Col(AB)$.

Sol.: **Méthode 1 :** Soit $\overrightarrow{T}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire associée à la matrice A. On considère sa restriction $\overrightarrow{T}_{A_{|ColB}}$ au sous-espace $ColB \subset \mathbb{R}^n$:

$$\overrightarrow{T}_{A_{|ColB}} : ColB \to \mathbb{R}^m.$$

Comme $KerA \cap ColB = \{\overrightarrow{0}\}$, cette application est injective. De plus, l'image de cette application est $\overrightarrow{T}_A(ColB) = Col(AB)$. L'application $\overrightarrow{T}_A$ réalise donc une bijection entre $ColB$ et $Col(AB)$. Par conséquent, la matrice A transforme toute base de $ColB$ en une base de $Col(AB)$.

Méthode 2 : Montrons d'abord que la famille $\{A\overrightarrow{b}_1, \cdots, A\overrightarrow{b}_k\}$ est linéairement indépendante. Soient $c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}
&c_1A\overrightarrow{b}_1 + c_2A\overrightarrow{b}_2 + \cdots + c_kA\overrightarrow{b}_k = \overrightarrow{0}\\
&\text{alors, } A(c_1\overrightarrow{b}_1 + \cdots + c_k\overrightarrow{b}_k) = \overrightarrow{0}\\
&\text{ainsi, } c_1\overrightarrow{b}_1 + \cdots + c_k\overrightarrow{b}_k \in KerA.
\end{aligned}$$

Or, le vecteur $c_1\overrightarrow{b}_1 + \cdots + c_k\overrightarrow{b}_k$ appartient à $ColB$ comme combinaison linéaire des $\overrightarrow{b}_j \in ColB$. Mais $KerA \cap ColB = \{\overrightarrow{0}\}$, ainsi $c_1\overrightarrow{b}_1 + \cdots + c_k\overrightarrow{b}_k = \overrightarrow{0}$. $\mathcal{B}$ étant une base, $\mathcal{B}$ est linéairement indépendante, d'où $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$. Par ailleurs, les colonnes de la matrice AB sont données par $A\overrightarrow{b}_1, \cdots, A\overrightarrow{b}_k$, donc $\{A\overrightarrow{b}_1, \cdots, A\overrightarrow{b}_k\}$ engendre $Col(AB)$. La famille $\{A\overrightarrow{b}_1, \cdots, A\overrightarrow{b}_k\}$ est donc une base de $Col(AB)$.

Exercice 2

Vous pouvez ignorer la partie (b), qui est longue à résoudre sans connaître les propriétés spéciales des matrices de Vandermonde.

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ a & 6 \end{pmatrix}$. Calculer le noyau et l'image de A en fonction des valeurs du paramètre réel a. Déterminer quand la matrice A est inversible.

b) Calculer le noyau et le rang de la matrice de Vandermonde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ en fonction des valeurs du paramètre réel a.

Sol.:

a) On calcule $\det(A) = 6 - a^2 + a$. Donc, si $a \neq -2$ ou $a \neq 3$, $det(A) \neq 0$ et A est inversible. Dans ce cas, $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Ker}(A) = 0$.
Si $a = -2$, alors $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Donc $\mathrm{Im}(A)$ est de dimension 1 avec base donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension 1 avec base donnée par $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Si $a = 3$, alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Donc $\mathrm{Im}(A)$ est de dimension 1 avec base donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension 1 avec base donnée par $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Par l'Exercice 9 de la série 5, on calcule

$$\det(B) = (2-1)(2-a)(2-(-1))(-1-1)(-1-a)(a-1) = 6(a-2)(a+1)(a-1).$$

Si $a \neq 2, -1$ et 1, alors $\det(B) \neq 0$ et B est inversible. Dans ce cas, $\mathrm{Im}(B) = \mathbb{R}^4$ et $\mathrm{Ker}(B) = 0$.
Si $a = 2, -1$ ou 1, alors le noyau de B est donné par le noyau de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathrm{Ker}(B)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1 avec base donnée par $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par le théorème du rang, on a que $\mathrm{rang}(B) = 4 - \dim\mathrm{Ker}(B) = 4 - 1 = 3$. Ainsi $\mathrm{Im}(B)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3 avec base donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

La notation ci-dessous est un peu différente de la notation qu'on utilise en classe.

Soient $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ et $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ deux bases d'un espace vectoriel V. Supposons que $b_1 = 6c_1 - 2c_2$ et $b_2 = 9c_1 - 4c_2$.

(a) Calculer la matrice de changement de base $P = (\mathrm{Id}_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.

(b) Trouver $(x)_{\mathcal{C}}$ pour $x = -3b_1 + 2b_2$ en utilisant le résultat en (a)

Soient $\mathcal{A} = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\}$ et $\mathcal{D} = \{\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.

$$\overrightarrow{a_1} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{a_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{d_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{d_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(c) Calculer la matrice de changement de base $P = (\mathrm{Id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{D}$.

(d) Calculer la matrice de changement de base $Q = (\mathrm{Id})_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{A}$.

Sol.:

(a) La matrice de changement de base de $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de base de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$:

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

(b) L'équation $x = -3b_1 + 2b_2$ implique que $(x)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Pour trouver $(x)_{\mathcal{C}}$ il suffit d'utiliser la matrice de changement de base :

$$(\overrightarrow{x})_{\mathcal{C}} = (\mathrm{Id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(x)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) Pour trouver la matrice de changement de base de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{D}$ il faut écrire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$ dans la base $\mathcal{D}$, c'est à dire trouver les nombres réels x_1 et x_2 tels que $\overrightarrow{a_1} = x_1\overrightarrow{d_1} + x_2\overrightarrow{d_2}$ et les nombres réels y_1 et y_2 tels que $\overrightarrow{a_2} = y_1\overrightarrow{d_1} + y_2\overrightarrow{d_2}$. Il suffit pour cela de résoudre les deux systèmes :

$$[\overrightarrow{d_1}\ \overrightarrow{d_2}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \overrightarrow{a_1} \quad \text{et} \quad [\overrightarrow{d_1}\ \overrightarrow{d_2}] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \overrightarrow{a_2}$$

On peut par exemple les résoudre simultanément comme vu en cours. On trouve $x_1 = -3$, $x_2 = -5$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ ce qui donne :

$$P = (\mathrm{Id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

(d) Pour trouver $Q = (\mathrm{Id})_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}}$ il suffit d'inverser P.

$$Q = (\mathrm{Id})_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}} = P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Exercice 4

Dans $\mathbb{P}_2$, calculer la matrice de changement de base de la base

$$\mathcal{B} = (1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2)$$

vers la base canonique $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$. Puis écrire les coordonnées du vecteur $p = -1 + 2t$ dans la base $\mathcal{B}$.

Sol.:

Pour trouver la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$, il suffit d'écrire la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique $\mathcal{C}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées du vecteur $x(t) = -1 + 2t$ dans la base standard sont : $(x)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les coordonnées $(x)_{\mathcal{B}}$ du même vecteur dans la base $\mathcal{B}$ vérifient : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} (x)_{\mathcal{B}} = (x)_{\mathcal{C}}$. Il suffit d'échelonner la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

pour trouver : $(x)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que $-1+2t = 5(1-2t+t^2)-2(3-5t+4t^2)+(2t+3t^2)$, une égalité que l'on aura avantage à vérifier si on ne veut pas perdre trois points à l'examen alors que le raisonnement était parfait.

Exercice 5

1. Soit $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

   a) Donner la matrice A de l'application linéaire T par rapport aux bases canoniques E de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
   b) Donner la matrice B de l'application linéaire T par rapport aux bases

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \text{ de } \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

2. Soit $T\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $T(C) = X \cdot C$, où X est la matrice de taille 2×2

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Donner la matrice A de l'application linéaire T par rapport à la base canonique de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
b) Donner la matrice B de l'application linéaire T par rapport à la base

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\} \text{ de } \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

On cherche $B = \big([T(B_1)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_2)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_3)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_4)]_{\mathcal{B}}\big)$.

Sol.:

1. La matrice de l'application linéaire T par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer la matrice B, on commence par calculer les images par T des vecteurs de la base $\mathcal{B}$:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on calcule les coordonnées de ces deux vecteurs image dans la base $\mathcal{C}$ en résolvant les systèmes suivants :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right).$$

Ainsi

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 4 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice de l'application linéaire T par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer la matrice B, on commence par calculer les images par T des matrices de la base $\mathcal{B}$:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5/2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 0, T\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Ensuite, on calcule les coordonnées des deux premiers vecteurs image dans la base $\mathcal{C}$ (les deux derniers sont les vecteurs nuls quelle que soit la base considérée) en résolvant les systèmes suivants :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 5/2 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 6 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -1/2 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/2 \end{array}\right).$$

Ainsi

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 9/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

a) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$.

☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 0.

☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 0.

☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1.

☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

b) On considère les polynômes $p(t) = (1-t)(1+t) = 1-t^2$ et $q(t) = (1+t)(1+t) = 1+2t+t^2$ de $\mathbb{P}_2$.

☐ Les polynômes p et q sont linéairement indépendants.

☐ Les polynômes p et q forment une base de $\mathbb{P}_2$.

☐ Le polynôme $q-p$ est le polynôme nul.

☐ $(1+t)p-(1-t)q$ est une combinaison linéaire de p et q.

c) Soit W l'hyperplan dans $\mathbb{R}^6$ donné par l'équation $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=0$. On considère les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- ☐ On peut complèter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.
- ☐ On peut complèter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.
- ☐ On peut complèter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.
- ☐ On peut complèter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.

d) Soit V un espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_k$ des vecteurs de V.

- ☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V = k$.
- ☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V \geqslant k$.
- ☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors $\dim V = k$.
- ☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors $\dim V \geqslant k$.

e) Soit $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application linéaire "trace" définie par

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d.$$

- ☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 1.
- ☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 2.
- ☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 3.
- ☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 4.

f) Soit $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application linéaire "trace" définie à la question f. Les matrices suivantes forment une base du noyau de Tr :

- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Sol.:

a) ☐ $\mathrm{Ker}A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

La matrice A représente une application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Ainsi $\mathrm{Ker}A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$, pas de $\mathbb{R}^4$. Pour trouver sa dimension il faut échelonner la matrice A. Comme toutes les lignes sont proportionnelles le noyau de A est la solution de l'équation $-x+3y=0$, une droite dans le plan.

b) ☐ Les polynômes p et q sont linéairement indépendants.

En effet, bien que $(1+t)p+(1-t)q=0$, ce n'est pas une combinaison **linéaire**, car dans une combinaison linéaire seuls des coefficients réels sont permis, pas des coefficients polynomiaux. Malgré cela ils ne sont pas assez nombreux pour former une base de $\mathbb{P}_2$. Enfin, le polynôme $q-p$ s'annule en 0, mais ce n'est pas le polynôme nul, c'est $2t+2t^2$.

c) ☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.

Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont proportionnels, ils sont donc linéairement dépendants et ne peuvent être complétés en une base. Par contre les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ sont linéairement indépendants, ils peuvent donc être complétées en une base de W. Le sous-espace W est donné par une équation à six inconnues. Cinq d'entre elles sont des inconnues secondaires qui jouent le rôle de paramètres, la dimension de W est donc 5.

d) ☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V \geqslant k$.

Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, on peut *compléter* cette famille en une base et cette base aura donc au moins k éléments. Autrement dit, la dimension de V est k au minimum ($\dim V \geqslant k$). Alors que, si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre V, on peut *extraire* une base de cette famille et cette base aura donc au plus k éléments. Autrement dit, la dimension de V est k au maximum ($\dim V \leqslant k$).

e) ☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 3.

Pour avoir $\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=0$, il faut que $a+d=0$, autrement dit que $d=-a$. Ainsi le noyau de l'application Tr correspond au sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

qui est de dimension 3.

f) ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Comme le noyau de Tr est de dimension 3, par la question f., il faut 3 matrices de ce sous-espace pour l'engendrer. De plus, les trois matrices ci-dessus sont linéairement indépendantes et appartiennent au noyau de Tr. Elles forment donc une base du noyau de Tr.